

## Leçon 108

Exemples de parties génératrices d'un groupe.  
Applications.

### I - Groupes abéliens de type fini

### II - Exemples de groupes non abéliens finis

### III - Les groupes linéaires

Dev 1 : Automorphismes de  $\mathfrak{S}_n$

Dev 2 : Générateurs de  $SL_2(\mathbb{Z})$  et  $SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$

### I - Groupes abéliens de type fini

**1) Définitions :** def partie génératrice, description partie engendrée, lien morphismes, def type fini, cas monogène, ordre, exemples [Ber18]

**2) Groupes cycliques :** def, iso  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ,  $|G|$  premier  $\Rightarrow G$  cyclique, description des sous-groupes/générateurs/inversibles,  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$  pas toujours cyclique, cas de  $K^\times$ , automorphismes, exemples [Rom21]

**3) Théorème de structure :** restes chinois, cyclicité de  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ , exposant, structure des GAF, exemples, structure des GATF [Rom21]

### II - Exemples de groupes non abéliens finis

**1) Groupes symétriques :** def, cycles, décomposition en cycles à supp disjoints, conjugaison, engendré par : cycles/transpositions/(1 j)/(i i + 1)/(1 2) et un n-cycle [dev 1][Rom21]

**2) Signature et groupes alternés :** def signature, calcul via générateurs, def  $\mathfrak{A}_n$ , distingué, cardinal, engendré par les 3-cycles, app : simplicité [Ulm12], [Ber18]

**3) Groupes diédraux :** def, interprétation, générateurs, groupe dérivé [Rom21], [Ulm12]

### III - Les groupes linéaires

**1) Groupes linéaires et spéciaux linéaires :** def  $SL \triangleleft GL$ , def transvections, dilatations,  $\langle \text{transvections} \rangle = SL$ ,  $\langle \text{transvections, dilatations} \rangle = GL$ , pivot de Gauss, connexité, [dev 2][Rom21], [Per04]

**2) Groupes orthogonaux et spéciaux orthogonaux :** def, Cartan-Dieudonné, corollaires, décomposition d'une rotation en retournements, sous-groupes de  $O_2(\mathbb{R})$  et  $SO_2(\mathbb{R})$  [Szp09]

**3) Sous-groupes d'isométries :** isométries préservent points extrémaux, se ramener au cas linéaire, groupes d'isométries de polygones/triangles/tétraèdre/cube/dodécaèdre, sous-groupes finis de  $SO_3(\mathbb{R})$  [CG18], [Rom21]

## Références

- [Ber18] Grégory BERTHUY. *Algèbre : Le grand combat*. Calvage & Mounet, 2018.
- [CG18] Philippe CALDERO et Jérôme GERMONI. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome Second*. Calvage & Mounet, 2018.
- [Per04] Daniel PERRIN. *Cours d'algèbre*. Ellipse, 2004.
- [Rom21] Jean-Etienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie*. De Boeck supérieur, 2021.
- [Szp09] A. SZPIRGLAS. *Mathématiques L3 : cours complet avec 400 tests et exercices corrigés. Algèbre*. Pearson Education, 2009.
- [Ulm12] Félix ULMER. *Théorie des groupes*. Ellipses, 2012.